Fernstudium4You.de

Klausurlösung Grundlagen der Wirtschaftsmathematik und Statistik

WS2018

Vorwort

Dieses Dokument beinhaltet die Lösung der Klausuraufgaben vom Wintersemester 2018 für die Wirtschaftsmathematik und Statistik der Fernuni Hagen. Die Lösungen unterteilen sich in den Teil 1 „Grundlagen der Analysis und linearen Algebra“ und den Teil 2 „Grundlagen der Statistik.

Aus urheberrechtlichen Gründen beinhaltet dieses Dokument nicht die Aufgabenstellungen. Die Originalklausuraufgaben können auf der Seite der Übungsklausuren heruntergeladen werden:

https://www.fernuni-hagen.de/wirtschaftswissenschaft/studium/uebungsklausuren.shtml

Es sei darauf hingewiesen, dass es sich bei den Lösungen **nicht** um Musterlösungen der Fernuni Hagen handelt. Bei den Lösungswegen handelt es sich um Empfehlungen. Auch andere Vorgehensweise führen zur maximalen Punktzahl.

Klausurlösung Analysis und lineare Algebra WS2018

Lösung Aufgabe 1

Bei den Aussagen A) - B) wird nach der Länge (Norm) von Vektoren gefragt. Die Länge eines Vektors wird durch die Summierung der einzelnen quadrierten reellen Zahlen und anschließender Wurzelziehung erreicht[1]: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$

A)

$\|1,\ \ 6,\ \ 0,\ \ 7\| = \sqrt{1^2 + 6^2 + 0^2 + 7^2} = \sqrt{86} \approx 9{,}2736$

Wir kommen zum Ergebnis $\sqrt{86}$ was nicht dem angegebenen Ergebnis von 86 entspricht.

Die Aussage ist falsch.

B)

$\|5,\ \ 6,\ \ 0\| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{61}$

$\|6,\ \ -3,\ \ 4,\ \ 0\| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{61}$

$\sqrt{61} = \sqrt{61}$

Beide Längen kommen zum gleichen Ergebnis. Die Aussage ist richtig.

Tipp: Um Längen von Vektoren miteinander zu vergleichen, sollte man meist auf das Wurzelziehen verzichten, denn die Ziehung der Wurzel führt meist zu nicht ganzzahligen Ergebnissen.

Die Aussage ist richtig.

[1] Siehe Mathe-Paket I: Norm, Orthogonalität und lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren S. 179

Bei den Aussagen C) - D) sind die 1. Ableitungen der Funktionen zu bilden, wobei die vertiefenden Ableitungsregeln angewendet werden müssen.[2]

C)

$f(x) = (5x-2)^4$

$f'(x) = 4 \cdot (5x-2)^3 \cdot 5 = 20 \cdot (5x-2)^3$

Bei der Ableitung dieser Funktion ist die Kettenregel zu beachten. Zunächst ist die äußere Ableitung vorzunehmen und diese mit der inneren Ableitung zu multiplizieren.

Die Ableitung stimmt nicht mit der angegebenen Ableitung überein.

Die Aussage ist falsch.

D)

$f(x) = e^{0,8x} \cdot e^{2x} = e^{2,8x}$

$f'(x) = 2,8 \cdot e^{2,8x}$

Zunächst sollte die angegebene Funktion zusammengefasst werden, sodass sich die Exponentialfunktion sehr leicht mithilfe der Kettenregel ableiten lässt.

Die Ableitung stimmt mit der angegebenen Ableitung überein.

Die Aussage ist richtig.

[2] Siehe Mathe-Paket I: Grundlagen der Ableitung S. 74
Vertiefende Ableitungsregeln S. 80
Partielle Ableitung und totales Differential S. 136

Bei der Aussage E) wird nach der 2. Ableitung von Funktionen gefragt. Die Hesse-Matrix ist eine spezielle Matrix, die sich mittels partieller Ableitungen bilden lässt.[3]

E)

Die Hesse-Matrix ist eine spezielle Matrix, die aus verschiedenen zweiten partiellen Ableitungen und den Kreuzableitungen besteht. Sie ist wie folgt aufgebaut:

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{yx}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Es sind die partiellen Ableitungen aus der angegebenen Funktion zu bilden:

$f(x,y) = e^x + 3x^3 + 2xy^2 - 5xy + 2y^4$

1. Partielle Ableitung nach x: $f_x(x,y) = e^x + 9x^2 + 2y^2 - 5y$

2. Partielle Ableitung nach x: $f_{xx}(x,y) = e^x + 18x$

2. Partielle Ableitung nach y: $f_{xy}(x,y) = 4y - 5$

1. Partielle Ableitung nach y: $f_y(x,y) = 4xy - 5x + 8y^3$

2. Partielle Ableitung nach y: $f_{yy}(x,y) = 4x + 24y^2$

2. Partielle Ableitung nach x: $f_{yx}(x,y) = 4y - 5$

Die zweiten partiellen Ableitungen sind nun in richtiger Reihenfolge in die Hesse-Matrix einzufügen:

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} e^x + 18x & 4y - 5 \\ 4y - 5 & 4x + 24y^2 \end{pmatrix}$$

Die Hesse-Matrix stimmt nicht mit der angegebenen Hesse-Matrix überein.

Die Aussage ist falsch.

B und **D** sind richtig.

A, C und E sind falsch.

[3] Siehe Mathe-Paket I: Grundlagen der Ableitung S. 74
Vertiefende Ableitungsregeln S. 80
Partielle Ableitung und totales Differential S. 136

Lösung Aufgabe 2

Bei den Aussagen A) - B) handelt es sich um Aufgaben der Flächenberechnung. Hier gilt es die Funktion zu integrieren und die Intervallgrenzen einzusetzen.

Bei den Aussagen C) - E) handelt es sich um Aufgaben der Integration. Da in den Aussagen sowohl die Funktion als auch die daraus möglich richtige Stammfunktion angegeben ist, können wir diese Aufgabe auch dadurch lösen, indem wir die angegebene Stammfunktion in der Aussage ableiten und mit der angegebenen Funktion in der Aufgabe vergleichen. Auf diesen Trick sollte man immer zurückgreifen, denn meist passieren weniger Fehler beim Ableiten als beim Integrieren.[4]

A)

$$\int_0^6 \frac{3}{8}x^2 + 2a \cdot dx = \frac{1}{8}x^3 + 2ax\Big|_0^6$$

$$= \left(\frac{1}{8} \cdot 6^3 + 2a \cdot 6\right) - \left(\frac{1}{8} \cdot 0^3 + 2a \cdot 0\right) = (27 + 12a) - (0) = 27 + 12a > 27 \; mit \; a > 0$$

Beim Integrieren der Funktion ist darauf zu achten, dass der Buchstabe a nicht wegfällt, sondern ebenfalls integriert wird. Für den Flächeninhalt ergibt sich $27 + 12a$. Da der Buchstabe a größer als 0 sein soll, wird zu der Zahl 27 definitiv etwas hinzuaddiert, sodass sich in jedem Fall ein Flächeninhalt größer als 27 ergibt.

Der mögliche Flächeninhalt stimmt nicht mit dem angegebenen Flächeninhalt überein.

Die Aussage ist falsch.

B)

$$\int_{\sqrt{2}}^5 2x \cdot dx = 1x^2|_{\sqrt{2}}^5$$

$$= (1 \cdot 5^2) - \left(1 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2\right) = (25) - (2) = 23$$

Es ist der Flächeninhalt durch einfaches integrieren und einsetzen der Intervallgrenzen zu bestimmen.

Der Flächeninhalt stimmt mit dem angegebenen Flächeninhalt überein.

Die Aussage ist richtig.

[4] Siehe Mathe-Paket I: Integrieren („Aufleiten“) einer Funktion S. 153
Flächenberechnung bei Funktionen S. 160

C)

$$F(x) = -\frac{1}{4ax} + \frac{3}{7}x^{b+3} + c$$

$$F'(x) = \frac{4a}{(4ax)^2} + (b+3) \cdot \frac{3}{7}x^{b+2} = \frac{4a}{16a^2x^2} + (b+3) \cdot \frac{3}{7}x^{b+2} = \frac{1}{4ax^2} + (b+3) \cdot \frac{3}{7}x^{b+2} \neq f(x)$$

Die Ableitung der Stammfunktion stimmt nicht mit der angegebenen Funktion überein.

Die Aussage ist falsch.

D)

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2} \cdot x \neq f(x)$$

Die Ableitung der Stammfunktion stimmt nicht mit der angegebenen Funktion überein.

Die Aussage ist falsch.

E)

$$F(x) = -\frac{1}{6x^3} + c$$

$$F'(x) = -\frac{0 \cdot 6x^3 - 1 \cdot 18x^2}{(6x^3)^2} = \frac{18x^2}{6^2 \cdot x^6} = \frac{1}{2x^4} = f(x)$$

Die Ableitung der Stammfunktion stimmt mit der angegebenen Funktion überein.

Die Aussage ist richtig.

B und **E** sind richtig.

A, C und D sind falsch.

Lösung Aufgabe 3

Die Aussagen A) - E) behandeln die Rechenregeln von Matrizen.[5]

A)

$$-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}k \quad \Rightarrow k=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{6}=5k \;\Rightarrow k=\frac{1}{6}:5=\frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{12}=0{,}5k \quad \Rightarrow k=\frac{1}{12}:0{,}5=\frac{1}{6}$$

Zur Prüfung auf lineare Abhängigkeit der beiden Vektoren ist zu untersuchen, ob ein eindeutiges Skalar k bestimmt werden kann. Das Skalar k ist nicht eindeutig bestimmbar. Der Vektor $\boldsymbol{a}$ kann nicht durch ein Vielfaches des Vektors $\boldsymbol{c}$ abgebildet werden.

Tipp: Bereits bei der Berechnung des zweiten Skalars ergibt sich keine Übereinstimmung mit dem ersten. Die Berechnung des letzten Skalars wäre deshalb nicht notwendig gewesen.

Kann ein Vektor **nicht** durch ein Vielfaches des anderen Vektors abgebildet werden, sind die Vektoren linear **un**abhängig voneinander.

Die Aussage ist richtig.

B)

$$\boldsymbol{c^T}\cdot\boldsymbol{b}=\left(\frac{4}{3},\;\;5,\;\;0{,}5\right)\cdot\begin{pmatrix}0{,}625\\0{,}25\\2\end{pmatrix}=\frac{4}{3}\cdot 0{,}625+5\cdot 0{,}25+0{,}5\cdot 2=\frac{37}{12}\approx 3{,}083$$

Bei der Berechnung des Skalarprodukts sind die Rechenregeln zur Multiplikation von Vektoren zu berücksichtigen. Es dürfen nur Vektoren unterschiedlicher Art miteinander multipliziert werden (Zeilenvektor · Spaltenvektor). Durch die erfolgte Transponierung des Vektors $\boldsymbol{c}$ in einen Zeilenvektor ist die Multiplikation mit dem Spaltenvektor $\boldsymbol{b}$ zulässig. Als Ergebnis eines Skalarprodukts ergibt sich immer eine Zahl und kein Vektor.

Das Ergebnis stimmt nicht mit dem angegebenen Ergebnis in der Aussage überein.

Die Aussage ist falsch.

[5] Siehe Mathe-Paket I: Grundlagen von Matrizen S. 187

C)

Für die Orthogonalität muss gelten:

$\boldsymbol{a^T} \cdot \boldsymbol{b} = 0$

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}625 \\ 0{,}25 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot 0{,}625 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}25 + \frac{1}{12} \cdot 2 = -\frac{5}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = 0 = 0$$

Das Skalarprodukt der Vektoren ergibt sich zu 0. In diesem Fall stehen die Vektoren senkrecht aufeinander, bzw. sind orthogonal zueinander.

Die Aussage ist richtig.

D)

$$\|\mathbf{c}\| = \left\|\frac{4}{3},\ \ 5,\ \ 0{,}5\right\| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 5^2 + 0{,}5^2} \approx \sqrt{27{,}03}$$

Als Norm eines Vektors wird die Länge des Vektors bezeichnet und ist mit unserer klassischen Formel aus Aufgabe 1 zu berechnen.

Die Norm/Länge des Vektors stimmt nicht mit der angegebenen Länge überein.

Die Aussage ist falsch.

E)

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/6 \\ 1/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}33 \\ 0{,}167 \\ 0{,}08 \end{pmatrix} < \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0{,}625 \\ 0{,}25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beim Vergleich von Vektoren sind die Zahlen der jeweiligen Positionen (Zeile) miteinander zu vergleichen. Der Vektor $\boldsymbol{a}$ ist kleiner als Vektor $\boldsymbol{b}$, sofern alle Zahlen des Vektors $\boldsymbol{a}$ kleiner sind als die Zahlen des Vektors $\boldsymbol{b}$. Zum besseren Vergleich sollten die Brüche von Vektor $\boldsymbol{a}$ in gerundeten Zahlen aufgeschrieben werden, sodass schnell zu erkennen ist, dass die Werte von Vektor $\boldsymbol{a}$ auf jeder Position bzw. in jeder Zeile kleiner sind, als die Werte von Vektor $\boldsymbol{b}$.

Der Vergleich zeigt, dass Vektor $\boldsymbol{a}$ kleiner als Vektor $\boldsymbol{b}$ ist. Dieses Ergebnis stimmt mit dem angegebenen Ergebnis überein.

Die Aussage ist richtig.

A, C und **E** sind richtig. B und D sind falsch.

Lösung Aufgabe 4

Aufgabe 4 behandelt unterschiedliche Themen der Analysis. Aussage A) behandelt die Nullstellen einer Funktion[6], Aussage B) bezieht sich auf das Berechnen des Funktionswertes und C) auf die Optima einer Funktion[7]. Aussage D) und E) behandelt die Thematik der Wendepunkte einer Funktion und das Krümmungsverhalten[8].

A)

Vor der Berechnung der Nullstellen sollten die angegebenen Klammern der Funktion ausmultipliziert werden:

$$f(x) = (x-3)\cdot(x+3)\cdot(x-6) = (x^2+3x-3x-9)\cdot(x-6) = (x^2-9)\cdot(x-6)$$

$$f(x) = (x^2-9)\cdot(x-6) = x^3-6x^2-9x+54$$

Zur Prüfung, ob die angegebenen Nullstellen richtig sind, sollten die angegebenen Nullstellen in der Aussage in die Funktion eingesetzt und geprüft werden, ob sich der Funktionswert zu null ergibt.

Tipp: Auf die eigene Berechnung der Nullstellen sollte hier aufgrund einer Gleichung 3. Grades verzichtet werden!

$$f(-3) = (-3)^3 - 6\cdot(-3)^2 - 9\cdot(-3) + 54 = 0$$

$$f(3) = 3^3 - 6\cdot 3^2 - 9\cdot 3 + 54 = 0$$

$$f(-6) = (-6)^3 - 6\cdot(-6)^2 - 9\cdot(-6) + 54 = -324 \neq 0$$

Bei der angegebenen Nullstelle $x_{N3} = -6$ handelt es sich nicht um eine Nullstelle, da sich der Funktionswert zu -324 ergibt.

Die Aussage ist falsch.

B)

Zur Prüfung dieser Aussage gilt es zunächst den angegebenen Wert 6 in die Funktion einzusetzen und den Funktionswert zu berechnen:

$$f(6) = 6^3 - 6\cdot 6^2 - 9\cdot 6 + 54 = 0$$

Bei $x = 6$ befindet sich die letzte Nullstelle der Funktion, da eine Funktion 3. Grades nur maximal drei Nullstellen aufweisen kann. Der Funktionsgraph wird also nicht ein weiteres Mal die x-Achse schneiden. Ergeben sich für $x > 6$ positive Werte, bleiben wir also folglich bis in die Unendlichkeit oberhalb der x-Achse. Es gilt einen beliebigen x-Wert oberhalb von 6 zu wählen und zu prüfen, ob sich ein positiver Funktionswert ergibt. Wir wollen $x = 7$ wählen:

[6] Siehe Mathe-Paket I: Nullstellen einer Funktion S. 93
[7] Siehe Mathe-Paket I: Lokales und globales Optimum einer Funktion S. 96
[8] Siehe Mathe-Paket I: Krümmungsverhalten und Wendepunkte einer Funktion S. 121

$f(7) = 7^3 - 6 \cdot 7^2 - 9 \cdot 7 + 54 = 40 > 0$

Für $x = 7$ ergibt sich ein positiver Funktionswert, entsprechend gilt für alle $x > 6$, dass $f(x) > 0$, da der Funktionsgraph die x-Achse nicht erneut schneiden wird und damit nicht mehr in den negativen Bereich gelangen kann.

Die Aussage ist richtig.

C)

Es gilt die 1. Ableitung der Funktion zu bilden, und die Optima zu berechnen:

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 54$

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 9$

Zur Bestimmung der Optima gilt es die 1. Ableitung gleich null zu setzen (notwendige Bedingung) und zur Anwendung der PQ-Formel umzuformen, sodass x^2 für sich steht:

$3x^2 - 12x - 9 = 0 \qquad |:3$

$x^2 - 4x - 3 = 0$

PQ-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-3)} = 2 \pm \sqrt{7}$$

$x_1 = 2 + \sqrt{7} \approx 4{,}6458$

$x_2 = 2 - \sqrt{7} \approx -0{,}6458$

Prüfung der hinreichenden Bedingung:

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(4{,}6458) = 6 \cdot 4{,}6458 - 12 = 15{,}8748 > 0 \qquad \Rightarrow Minimum$

$f''(-0{,}6458) = 6 \cdot (-0{,}6458) - 12 = -15{,}8748 < 0 \quad \Rightarrow Maximum$

Die berechneten Optima stimmen nicht mit den angegebenen Optima in der Aussage übereinstimmen.

Die Aussage ist falsch.

D)

Zur Berechnung des Wendepunktes ist die 2. Ableitung der Funktion gleich null zu setzen. Zusätzlich muss die Bedingung gelten, dass die 3. Ableitung ungleich null ist:

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 54$

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 9$

$f''(x) = 6x - 12$

Nullsetzten der 2. Ableitung und umstellen nach x zur Bestimmung des Wendepunktes:

$6x - 12 = 0 \quad | + 12 \quad |: 6$

$x = 2$

Für die 3. Ableitung gilt:

$f'''(x) = 6 > 0$

Der Wendepunkt der Funktion befindet sich bei $x = 2$ und stimmt mit dem angegebenen Wende-punkt in der Aussage überein.

Die Aussage ist richtig.

E)

Da wir aus C) wissen, dass es sich bei dem Punkt $x_2 \approx -0{,}6458$ um ein Maximum handelt und ein Maximum immer konkav gekrümmt sein muss, kann die Funktion unterhalb von $x < 0$ nicht in jedem Punkt konvex gekrümmt sein.

Die Aussage ist falsch.

B und **D** sind richtig. A, C und E sind falsch.

Lösung Aufgabe 5

Aufgabe 5 behandelt die graphische Interpretation einer Funktion.[9]

A)

$f(x) = g(x) \qquad | - g(x)$

$f(x) - g(x) = 0$

Zur Bestimmung von Schnittpunkten zweier Funktionen sind diese gleich zu setzen. Stellt man die Gleichsetzung um, gelangt man zur Gleichung in Aussage A).

Die Lösung stimmt mit der angegebenen Lösung überein.

Die Aussage ist richtig.

B)

Der Funktionswert (Wert auf der y-Achse) von $f(a)$ soll mit dem Funktionswert von $f(c)$ verglichen werden. Da sich $f(a)$ im positiven und $f(c)$ dagegen im negativen Bereich der y-Achse befindet, sind diese nicht gleich. Es gilt:

$f(a) > f(c)$

Die Lösung stimmt nicht mit der angegebenen Lösung überein.

Die Aussage ist falsch.

C)

Der Funktionswert (Wert auf der y-Achse) von $f(a)$ soll mit dem Funktionswert von $g(b)$ verglichen werden. Da sich $f(a)$ im positiven und $g(b)$ dagegen im negativen Bereich der y-Achse befindet, gilt:

$f(a) > g(b)$

Die Lösung stimmt mit der angegebenen Lösung überein.

Die Aussage ist richtig.

[9] Siehe Mathe-Paket I: Graphische Interpretation einer Funktion S. 116

D)

Da es sich bei dem Punkt $f(a)$ um ein Maximum handelt, kann die 2. Ableitung der Funktionsgleichung im Punkt a nicht gleich null lauten, da für die hinreichende Bedingung eines Maximums gilt, dass $f''(x) < 0$ sein muss. Folglich gilt:

$f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$

Die Lösung stimmt nicht mit der angegebenen Lösung überein.

Die Aussage ist falsch.

E)

Da es sich bei dem Punkt $g(b)$ um ein Minimum handelt, muss die 1. Ableitung der Funktionsgleichung im Punkt b gleich null lauten, da für die notwendige Bedingung eines Minimums gilt, dass $f'(x) = 0$ sein muss. Bei einer Stammfunktion handelt es sich um nichts anderes als die integrierte bzw. um eine „Aufleitung" einer Funktion. Leitet man die 2. Ableitung „auf", gelangt man folglich wieder zur 1. Ableitung, die auch wieder bei einem Minimum auf gleich null lauten muss. Folglich gilt:

$g'(b) = 0$ und $G''(b) = 0$

Die Lösung stimmt mit der angegebenen Lösung überein.

Die Aussage ist richtig.

A, C und **E** sind richtig.

B und D sind falsch.

Lösung Aufgabe 6

Die Aussagen A) - E) behandeln die Rechenregeln von Matrizen.[10]

A)

Zur Multiplikation von Matrizen muss die Spaltenanzahl der ersten Matrix mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmen. Die erste angegebene Matrix hat lediglich 2 Spalten, die zweite Matrix hingegen 4 Zeilen, eine Multiplikation ist hier nicht zulässig:

$(3,2) \cdot (4,2)$

Die Lösung stimmt nicht mit der angegebenen Lösung überein.

Die Aussage ist falsch.

B)

Zur Multiplikation von Matrizen muss die Spaltenanzahl der ersten Matrix mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmen. Die erste angegebene Matrix hat 3 Spalten. Die Angabe der zweiten Matrix ist etwas fraglich, ob die Matrix zunächst zu transponieren ist, oder bereits transponiert wurde. In beiden Fällen jedoch, stimmt die Spaltenanzahl der ersten Matrix nicht mit der Zeilenanzahl (entweder 2 oder 4) der zweiten Matrix überein. Eine Multiplikation ist hier nicht zulässig.

Die Lösung stimmt nicht mit der angegebenen Lösung überein.

Die Aussage ist falsch.

C)

Zur Multiplikation von Matrizen muss die Spaltenanzahl der ersten Matrix mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmen. Die erste angegebene Matrix hat lediglich 3 Spalten, die zweite Matrix hingegen 4 Zeilen, eine Multiplikation ist hier nicht zulässig:

$(2,3) \cdot (4,2)$

Die Lösung stimmt nicht mit der angegebenen Lösung überein.

Die Aussage ist falsch.

[10] Siehe Mathe-Paket I: Grundlagen von Matrizen S. 187

D)

Es ist davon auszugehen, dass die erste Matrix wahrscheinlich zunächst einmal transponiert werden soll, sodass wir zu folgenden Matrizen gelangen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Multiplikation ist in diesem Fall zulässig, da die Spaltenanzahl der ersten Matrix mit 2, mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix mit 2 übereinstimmt. Die Multiplikation ergibt sich zu:

Falkisches Schema:

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 11 & 11 & 8 \\ 5 & 7 & 17 & 6 \\ 13 & 23 & 37 & 18 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Das Ergebnis der Multiplikation stimmt mit der angegebenen Matrix überein.

Die Aussage ist richtig.

E)

Die Spaltenanzahl der ersten Matrix stimmt mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix überein. Eine Multiplikation ist zulässig:

Falkisches Schema:

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 11 & 11 & 8 \\ 5 & 7 & 17 & 6 \\ 13 & 23 & 37 & 18 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Das Ergebnis der Multiplikation stimmt mit der angegebenen Matrix überein.

Die Aussage ist richtig.

D und **E** sind richtig.

A, B und C sind falsch.

Lösung Aufgabe 41 (numerisch)

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Aufgabe der Folgen und Reihen[11] und nur im weiteren Sinne um die Thematik der Abschreibungsmethoden.[12]

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um die Berechnung einer geometrischen Folge, wobei wir zwei Folgeglieder angegeben haben und es den prozentualen Abstand zu ermitteln gilt. Das n-te Folgeglied einer geometrischen Folge berechnet sich wie folgt:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Wir haben das Folgenglied a_1 mit dem Anschaffungswert von 120.000€ gegeben und das Folgenglied a_3 mit dem Restbuchwert von 89787€. Mit diesen Werten lässt sich nun q berechnen:

$$89787 = 120000 \cdot q^{3-1} \quad |: 120000 \quad |Drehen$$

$$q^2 = \frac{89787}{120000} \qquad |\sqrt{}$$

$$q = \sqrt{\frac{89787}{120000}} = 0{,}865$$

Nach einer Abschreibung bleiben noch jeweils 86,5% des vorherigen Restbuchwertes erhalten, was bedeutet, dass insgesamt mit $1 - 0{,}865 = 0{,}135 \mathrel{\widehat{=}} 13{,}5\%$ abgeschrieben wird.

Die Lösung lautet 0,135 bzw. 13,5%.

[11] Siehe Mathe-Paket I: Folgen und Reihen S. 7
[12] Siehe Mathe-Paket I: Abschreibungsmethoden mathematisch S. 37

<u>Lösung Aufgabe 42 (numerisch)</u>

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Aufgabe der Integrale bzw. der Flächenberechnung.[13]

Diese Aufgabe ist sehr schwierig und erfordert eine gute Vorstellungskraft. In der Aufgabe ist kein Intervall der Fläche angegeben, die es zu berechnen gilt. Die Intervallgrenzen entsprechen in diesem Fall den Schnittpunkten der beiden Funktionen. Zur Ermittlung der Schnittpunkte zweier Funktionen sind diese gleichzusetzen und die Variable x zu berechnen:

$$f(x) = g(x)$$

$$0{,}6x^2 - 8x + 13 = 4x + 13 \qquad | - 13 \quad | - 4x$$

$$0{,}6x^2 - 12x = 0$$

Die Anwendung der PQ-Formel ist hier notwendig. Deshalb muss die Funktion so umgeschrieben werden, dass die PQ-Formel verwendet werden darf (keine Zahl vor dem x^2)

$$0{,}6x^2 - 12x = 0 \quad |: 0{,}6$$

$$x^2 - 20x = 0$$

Anwendung der PQ-Formel:

$$x_1, x_2 = -\frac{-20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2} = 10 \pm 10$$

$$x_1 = 20 \;\Rightarrow \mathit{Obere\ Grenze}$$

$$x_2 = 0 \;\Rightarrow \mathit{Untere\ Grenze}$$

Der Flächeninhalt ist also vom Intervall von 0 bis 20 zu bestimmen.

Bei der Bestimmung der Fläche gilt es zu beachten, dass wir zwei Funktionen besitzen. Deshalb ist sowohl einmal der Flächeninhalt der Funktion $f(x)$, als auch der Flächeninhalt der Funktion $g(x)$ zu bestimmen.

Flächeninhalt der Funktion $f(x)$:

$$\int_0^{20} 0{,}6x^2 - 8x + 13 \cdot dx = 0{,}2x^3 - 4x^2 + 13x|_0^{20}$$

$$\mathit{Flächeninhalt}\ f(x) = (0{,}2 \cdot 20^3 - 4 \cdot 20^2 + 13 \cdot 20) - (0{,}2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 13 \cdot 0)$$

$$\mathit{Flächeninhalt}\ f(x) = 260 - 0 = 260$$

---

[13] Siehe Mathe-Paket I: Integrieren („Aufleiten“) einer Funktion S. 153
Flächenberechnung bei Funktionen S. 160

Flächeninhalt der Funktion $g(x)$:

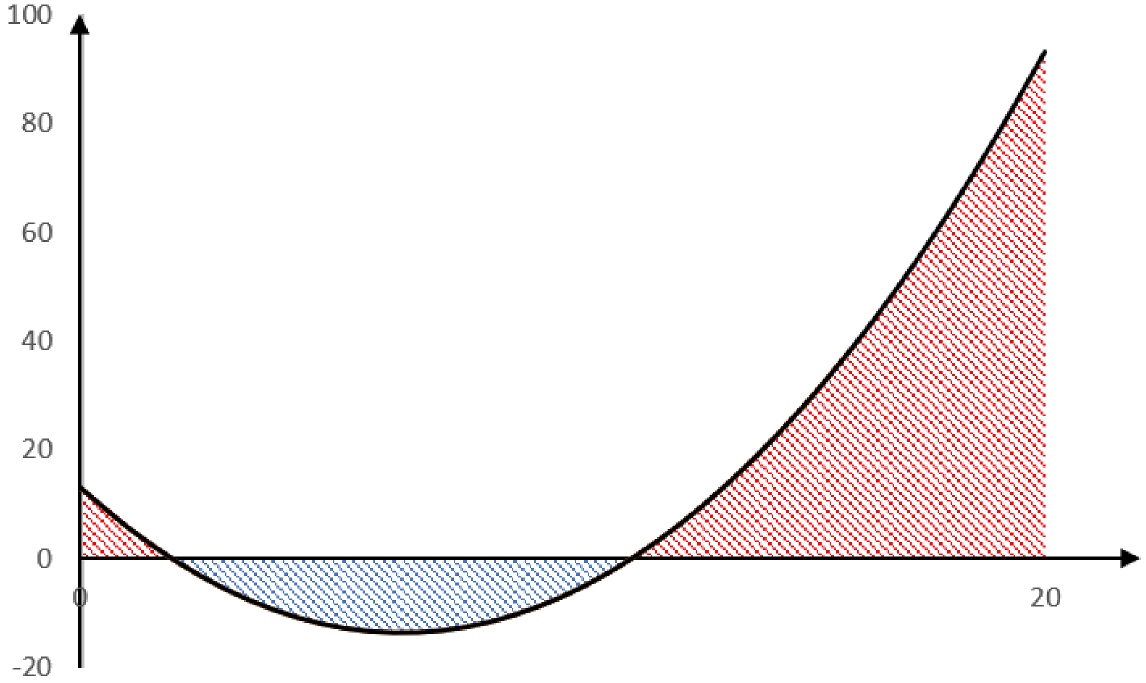
$$\int_0^{20} 4x + 13 \cdot dx = 2x^2 + 13x|_0^{20}$$

$$Flächeninhalt\ g(x) = (2 \cdot 20^2 + 13 \cdot 20) - (2 \cdot 0^2 + 13 \cdot 0)$$

$$Flächeninhalt\ g(x) = 1060 - 0 = 0$$

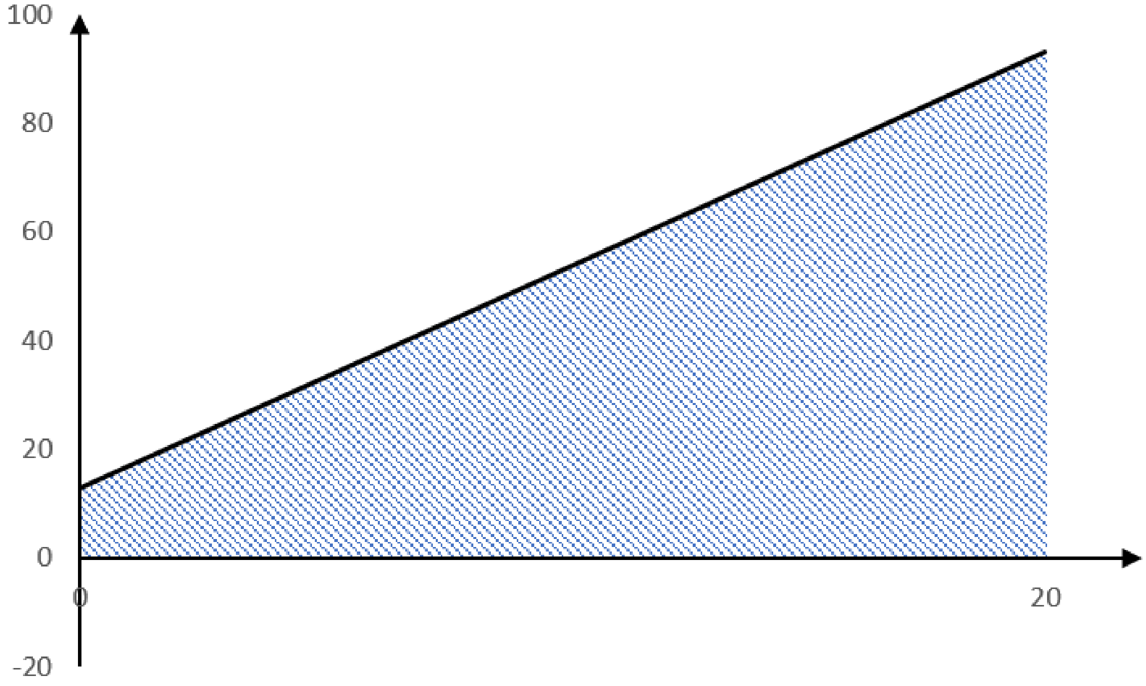
Zur Ermittlung der Fläche des Metalls ist nun der Flächeninhalt $f(x)$ vom Flächeninhalt $g(x)$ abzuziehen. Um diesen Zusammenhang leichter verstehen zu können, betrachten wir kurz, welche Flächen wir bei den Funktionen berechnet haben.

Fläche der Funktion $f(x)$:



Bei der Berechnung der Fläche dieser Funktion wird von den Flächen oberhalb der x-Achse die Fläche unterhalb der x-Achse abgezogen. Insgesamt ergibt sich die Fläche zu 260. Da wir aber nur die Fläche unterhalb der x-Achse benötigen und diese von den Flächen oberhalb der x-Achse bereits abgezogen wurde, ist diese Fläche bereits im Flächeninhalt von $f(x)$ berücksichtigt. Ziehen wir also gleich vom Flächeninhalt von $g(x)$ den Flächeninhalt von $f(x)$ ab, so subtrahieren wir die Randflächen des Metalls, abzüglich der kleinen blauen Fläche unterhalb, die wir benötigen.

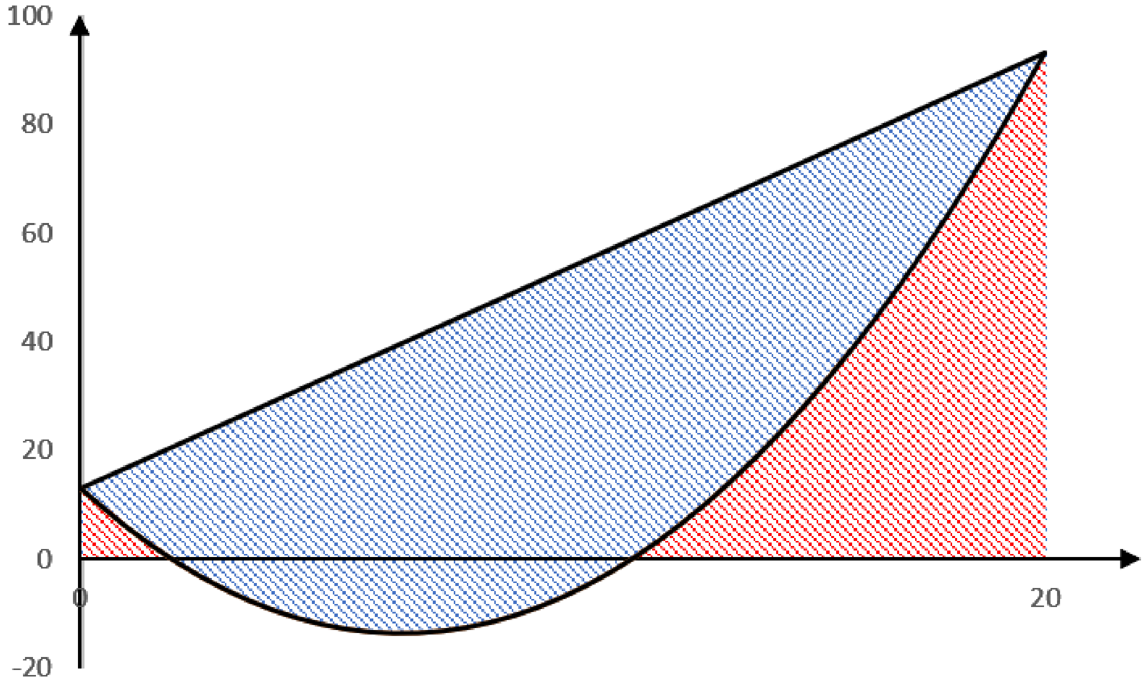
Fläche der Funktion $g(x)$:



Die Fläche der Funktion $g(x)$, welche eine Gerade darstellt, liegt ausschließlich oberhalb der x-Achse und ergibt sich zu 1060. Die Problematik liegt hierbei, dass die Seiten, die links und rechts ausgeschnitten werden, zu viel sind.

Zieht man nun den Flächeninhalt der Funktion $f(x)$ vom Flächeninhalt der Funktion $g(x)$ ab, verrechnen sich die überschüssigen Seiten bei $g(x)$ und man gelangt zu folgender Gesamtfläche:

Fläche der Funktion $g(x) - f(x)$:



Diese Fläche entspricht genau dem gewünschten Ausschnitt. Entsprechend müssen wir vom Flächeninhalt der Funktion $g(x)$ den Flächeninhalt von $f(x)$ abziehen:

$$Gesamtflächeninhalt = g(x) - f(x) = 1060 - 260 = 800$$

Die Fläche einer Seite des Metallstücks beträgt 800dm². Da beide Seiten lackiert werden müssen, ist dieser Flächeninhalt zu verdoppeln:

$$Flächeninhalt\ beider\ Seiten = 800 \cdot 2 = 1600dm^2$$

Es sollen die Kosten für den Speziallack ausgerechnet werden. Der Speziallack kostet 1,15 Euro je dm². Zur Berechnung der Kosten ist der Flächeninhalt beider Seiten mit den Kosten von 1,15 Euro zu multiplizieren:

$$Kosten\ des\ Speziallacks = 1600 \cdot 1{,}15 = 1840$$

Die Kosten für die Lackierung eines Metallstücks belaufen sich auf 1840,00 Euro.

Die Lösung lautet 1840,0 Euro.

Lösung Aufgabe 43 (numerisch)

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Aufgabe der Lösung eines linearen Programmes mittels des Simplex-Algorithmus.[14]

Um das lineare Programme mittels Simplex-Algorithmus lösen zu können, muss den Nebenbedingungen jeweils eine Schlupfvariable zugeordnet werden. Da es insgesamt drei Nebenbedingungen gibt, führt das zu den Schlupfvariablen x_3, x_4 und x_5. Das lineare Programm wird in einem Simplex-Tableau wie folgt notiert:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
-15	-5	0	0	0	0
2	2	1	0	0	24
2	4	0	1	0	32
0	1	0	0	1	3

Zur Ermittlung des Zielfunktionswert ist dieses Simplex-Tableau mit Simplex-Schritten zu lösen. Der Zielfunktionswert kann dann in der oberen Zeile in der RHS-Spalte abgelesen werden.

Zur Durchführung des ersten Simplex-Schrittes ist das Pivotelement zu ermitteln, und aus der Spalte in der das Pivotelement steht ein Einheitsvektor zu formen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	$Division$	
$\mathbf{-15}$	-5	0	0	0	0		$I - II \cdot (-{}^{15}/_{2})$
2	2	1	0	0	24	${}^{24}/_{2} = 12$	$:2$
2	4	0	1	0	32	${}^{32}/_{2} = 16$	$III - II \cdot {}^{2}/_{2}$
0	1	0	0	1	3	${}^{3}/_{0} = /$	

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
0	10	$7{,}5$	0	0	$\mathbf{180}$
1	1	$0{,}5$	0	0	12
0	2	-1	1	0	8
0	1	0	0	1	3

Es erfordert keinen weiteren Simplex-Schritt, da in der Zielfunktion keine negative Zahl mehr zu finden ist. Der Zielfunktionswert des linearen Programmes lautet 180.

Tipp: Die Berechnung des vollständig gelösten Simplex-Tableaus ist nicht erforderlich. Berechnet man in der ersten Zeile die Zielfunktion und es ergibt sich keine weitere negative Zahl, kann sofort der Zielfunktionswert notiert werden, ohne die weiteren Zeilen zu berechnen. Das spart Zeit.

Die Lösung lautet 180,0.

[14] Siehe Mathe-Paket I: Simplex-Algorithmus S. 238

<u>Lösung Aufgabe 44 (numerisch)</u>

Bei dieser Aufgabe handelt es sich erneut um eine Aufgabe der Thematik der Integrale.[15]

Zur Lösung dieser Aufgabe muss man mit der Notation der Integrale vertraut sein. Es gilt den absoluten Flächeninhalt des angegebenen Integrals zu berechnen. Dazu ist zuerst auf eine Nullstelle innerhalb der Funktion zu prüfen. Existiert eine Nullstelle innerhalb des angegebenen Intervalls $[-4{,}16]$ muss eine Trennung des Integrals in Teilintervalle an den Nullstellen vorgenommen werden. Die Beträge der Teilintervalle werden zur Berechnung des absoluten Flächeninhalts addiert.
Allgemein wird der absolute Flächeninhalt wie folgt berechnet:

$$\int_{x_a}^{x_b} |f(x)| \cdot dx = \left| \int_{x_a}^{x_0} f(x) \cdot dx \right| + \left| \int_{x_0}^{x_b} f(x) \cdot dx \right|$$

Schritt 1: Prüfung der angegebenen Funktion auf Nullstellen

$3{,}75x = 0$

$x = 0$

An der Stelle $x = 0$ besitzt die Funktion eine Nullstelle.

Schritt 2: Trennung des Intervalls in Teilintervalle

Die Trennung des Intervalls in zwei Teilintervalle muss an der Nullstelle $x = 0$ erfolgen:

$$\int_{-4}^{16} |3{,}75x\,| = \left| \int_{-4}^{0} 3{,}75x \right| + \left| \int_{0}^{16} 3{,}75x \right|$$

Schritt 3: Berechnung des absoluten Flächeninhalts des Integrals

Es gilt die Funktion durch Bildung der Stammfunktion zu integrieren:

$$\left| \int_{-4}^{0} 3{,}75x \right| + \left| \int_{0}^{16} 3{,}75x \right| = \left| 1{,}875x^2 |_{-4}^{0} \right| + \left| 1{,}875x^2 |_{0}^{16} \right|$$

Berechnung des Flächeninhalts durch einsetzten der Integrationsgrenzen:

$$|(1{,}875 \cdot 0^2) - (1{,}875 \cdot (-4)^2)| + |(1{,}875 \cdot 16^2) - (1{,}875 \cdot 0^2)| = |0 - 30| + |480 - 0| = 30 + 480 = 510$$

Der absolute Flächeninhalt der Funktion beträgt 510.

Die Lösung lautet 510,0.

[15] Siehe Mathe-Paket I: Flächenberechnung bei Funktionen S. 160

Klausurlösungen auf Fernstudium4You.de

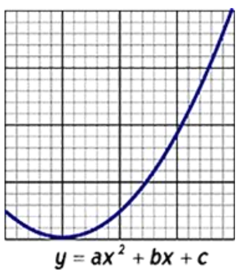
Die **Mathe-Pakete** enthalten die **Klausurlösungen** der relevanten Semester für die Klausur der Wirtschaftsmathematik und Statistik der Fernuni Hagen und vieles mehr:

Videovorträge

Qualitativ hochwertige, strukturierte und motivierende Videovorträge zur Wirtschaftsmathematik und Statistik. Die Videovorträge helfen dir viele Thematiken zu verstehen, ohne das Skript zuvor gelesen zu haben. Der Vortrag ist auf allen gängigen Geräten verfügbar, sowohl auf dem PC, Tablet als auch Smartphone.

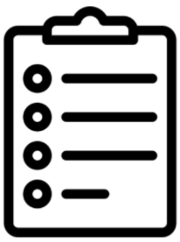
Folienskripte

Du erhältst alle Folien und Übersichten der Präsentation zur visuellen Unterstützung und zum besseren Verständnis. Nach dem Ausdrucken kannst du hier Notizen und für dich sinnvolle Ergänzungen während des Videovortrags machen, als auch gänzlich ohne Internet mit den Mathe-Paketen arbeiten und lernen.



Formelsammlungen

Die Formelsammlungen enthalten alle relevanten Formeln. Auf einem Blick hast du eine sofortige Übersicht der Formeln, als auch eine Beschreibung der einzelnen Symbole. So kannst du während des Lernens schnell nachschlagen und musst nicht seitenweise durch das Skript blättern. Zusätzlich kannst du damit schnell und einfach die wichtigsten Formeln Auswendiglernen und im Glossar markieren.



Übungsaufgaben

Zu jeder Thematik des Videovortrages gibt es passende Übungsaufgaben im Multiple-Choice Stil, angelehnt an die Klausuraufgaben. Insgesamt stehen dir bereits über 240 Übungsaufgaben zur Verfügung, sodass du das Gelernte in die Praxis umsetzten kannst und damit dein Wissen weiter vertiefst.

Übungsklausuren

Dir steht eine unbegrenzte Anzahl an Statistik-Übungsklausuren zur Verfügung. Aus allen über 160 Übungsaufgaben werden wahllos genau 10 Aufgaben ausgewählt, die eine Klausur darstellen. Nach Bearbeitung der Aufgaben erhältst du eine persönliche Klausurnote und detailliertes Feedback. Durch das Simulieren einer Klausur kannst du dich perfekt auf den Klausurablauf vorbereiten.

Klausurlösung Grundlagen der Statistik WS2018

(http://www.fernuni-hagen.de/wirtschaftswissenschaft/studium/download/pruefungen/31101_ws1718.pdf)

Lösung Aufgabe 7

Die Aussagen A)-E) behandeln die Grundlagen der Merkmale

A)

Richtig. Metrische Merkmale werden nochmal in die drei verschiedenen Skalen: Intervallskala, Verhältnisskala und Absolutskala unterschieden. Die Zuordnung der metrischen Merkmale in diese drei verschiedenen Skalen erfolgt aufgrund unterschiedlicher Größen, wobei mit Größen Maßeinheiten verschiedener Arten (Grad Celsius, Meter, etc.) gemeint ist. Da diese Größen alle in Form von Zahlenwerten erhoben werden können, sind diese quantitativ.

Die Aussage ist richtig.

B)

Falsch. Nominalskalierte Merkmale können nicht als Zahlenwerte erhoben werden, entsprechend liegen diese Merkmale qualitativ vor.

Die Aussage ist falsch.

C)

Richtig. Die dichotome Grundgesamtheit ist sozusagen die Binomialverteilung. Wie wir wissen, gibt es in der Binomialverteilung nur zwei mögliche Merkmalsausprägungen bzw. Möglichkeiten, die zur Auswahl stehen. In diesem Fall ist es „Eigenschaft vorhanden“ oder „Eigenschaft nicht vorhanden“.

Die Aussage ist richtig.

D)

Falsch. Misst man die Lebensdauer, Größe oder das Gewicht genügend genau, erheben sich für die erhobenen Zahlenwerte Stellen hinter dem Komma (4,5 Jahre, 1,86m, 70,5kg). Weisen erhobene Merkmalswerte Stellen hinter dem Komma auf, bzw. sind nicht ganzzahlig, werden diese als stetige Merkmale bezeichnet.

Die Aussage ist falsch.

E)

Richtig. Nominalskalierte Merkmale unterscheiden sich ausschließlich nur nach ihrer Gleichheit (Häufigkeiten bei Beobachtungen) oder Verschiedenheit (mehrere Ausprägungen), können jedoch nicht in eine Rangordnung gebracht werden.

Die Aussage ist richtig.

A, **C** und **E** sind richtig.

B und D sind falsch.

Lösung Aufgabe 8

Die Aussagen A)-E) behandeln die Thematik der Lage- und Streuungsmaße.

Vor dem Lösen dieser Aufgabe sind die angegebenen Merkmalswerte nach ihrer Reihenfolge zu sortieren:

1 1 2 3 3 7 7 7 8 10

A)

Der Modalwert entspricht der Merkmalsausprägung, die am häufigsten vorkommt:

$$x_{mod} = \max h(x_j) = 7$$

Der Merkmalswert 7 kommt am häufigsten vor.

Die Aussage ist richtig.

B)

Es existiert keine Merkmalsausprägung die ebenfalls mit der gleichen Häufigkeit wie die Merkmalsausprägung 7 vorkommt. Entsprechend gibt es nur ein Modalwert.

Die Aussage ist falsch.

C)

Die Anzahl der Merkmalswerte $n = 10$ ist mit 0,5 zu multiplizieren:

$$x_{0,5} = n \cdot 0{,}5 = 10 \cdot 0{,}5 = 5$$

Die Zahl ist gerade, also müssen wir den Durchschnitt aus der Merkmalsausprägung an 5ter und 6ter Stelle berechnen:

$$x_{med} = \frac{3+7}{2} = 5$$

Der Median beträgt 5.

Die Aussage ist falsch.

D)

Es ist das arithmetische Mittel zu berechnen:

$$\bar{x} = \frac{1+1+2+3+3+7+7+7+8+10}{10} = \frac{49}{10} = 4{,}9$$

Die Aussage ist richtig.

E)

Es ist zunächst die Varianz der Merkmalswerte zu berechnen:

$$\tilde{s}^2 = \frac{2 \cdot (1-4{,}9)^2 + (2-4{,}9)^2 + 2 \cdot (3-4{,}9)^2 + 3 \cdot (7-4{,}9)^2 + (8-4{,}9)^2 + (10-4{,}9)^2}{10}$$

$$\tilde{s}^2 = \frac{94{,}9}{10} = 9{,}49$$

Nun gilt es die Beobachtungswerte mit 2 zu multiplizieren und das arithmetische Mittel erneut auszurechnen, wobei sich hier auch schnell erkennen lässt, dass sich das arithmetische Mittel ebenfalls verdoppelt. Die Reihe von Merkmalswerten verdoppelt lautet:

2 2 4 6 6 14 14 14 16 20

$$\bar{x} = \frac{2+2+4+6+6+14+14+14+16+20}{10} = \frac{98}{10} = 9{,}8$$

Es gilt erneut die Varianz zu berechnen:

$$\tilde{s}^2 = \frac{2 \cdot (2-9{,}8)^2 + (4-9{,}8)^2 + 2 \cdot (6-9{,}8)^2 + 3 \cdot (14-9{,}8)^2 + (16-9{,}8)^2 + (20-9{,}8)^2}{10}$$

$$\tilde{s}^2 = \frac{379{,}6}{10} = 37{,}96$$

Die Varianz $\tilde{s}^2$ verändert sich um den Faktor $\frac{37{,}96}{9{,}49} = 4$.

Merke: Diese Aufgabe hätte man leichter mit den Rechenregeln für Varianzen lösen können, da wir wissen, dass ein Multiplikator/Faktor immer zu quadrieren ist, um zur Varianz zu gelangen:

$$\tilde{s}^2 = \mathbf{2^2} \cdot 9{,}49 = \mathbf{4} \cdot 9{,}49 = 37{,}96$$

Die Aussage ist falsch.

A und **D** sind richtig.

B, C und E sind falsch.

Lösung Aufgabe 9

Die Aussagen A) - E) behandeln die Thematik der Korrelationsrechnung.

A)

Falsch. Der Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson kann lediglich für metrisch skalierte Merkmale berechnet werden. Ist ein Merkmal ordinalskaliert kann lediglich der Korrelationskoeffizient nach Spearman berechnet werden.

Die Aussage ist falsch.

B)

Richtig. Der Korrelationskoeffizient nach Spearman trifft eine Aussage über die Stärke des monotonen Zusammenhangs zwischen zwei Merkmalen.

Die Aussage ist richtig.

C)

Richtig. Da nach dem „betragsmäßigen" Zusammenhang gefragt wird, ist es unerheblich, ob der Korrelationskoeffizient den Wert 1 oder -1 annimmt, die Beobachtungswerte liegen in jedem Fall entweder auf einer steigenden oder fallenden Geraden.

Die Aussage ist richtig.

D)

Falsch. Korrelationskoeffizienten können lediglich eine Aussage über die Stärke des Zusammenhangs treffen, nicht jedoch über die Kausalität des Zusammenhangs.

Die Aussage ist falsch.

E)

Falsch. Nur die Unabhängigkeit von Merkmalen zeigt auf, dass kein Zusammenhang zwischen den Merkmalen existiert. Der Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson trifft lediglich eine Aussage über den linearen Zusammenhang zwischen den Merkmalen.

Die Aussage ist falsch.

B und **C** sind richtig.

A, D und E sind falsch.

Lösung Aufgabe 10

Die Aussagen A) – E) behandeln die Thematik der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

A)

Falsch. Hier wurde der Additionssatz umgestellt:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(Z)$$

Umformen:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(Z) \quad | + P(Z)$$

$$P(X \cup Y) + P(Z) = P(X) + P(Y)$$

Die Schnittmenge muss zur Vereinigungsmenge addiert anstatt subtrahiert werden.

Die Aussage ist falsch.

B)

Richtig. Wenn Z die Schnittmenge zwischen X und Y darstellt, kann die Schnittmenge Z kleiner oder gleich der Menge von Y sein. Die Gleichheit ist dann der Fall, wenn es sich bei der Menge von Y um eine Teilmenge von X handelt.

Die Aussage ist richtig.

C)

Richtig. Für $P(X|Y)$ gilt:

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$$

Da $P(Z)$ mit der Schnittmenge von X und Y übereinstimmt, kann man auch schreiben:

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(Z)}{P(Y)}$$

Multiplizieren wir diesen Term mit $P(Y)$ gelangen wir zu:

$$\frac{P(Z)}{P(Y)} \cdot P(Y) = P(Z)$$

Die Aussage ist richtig.

D)

Richtig. Hier wurde der Additionssatz umgestellt:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(Z)$$

Umformen:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(Z) \quad | + P(Z) \quad | - P(X \cup Y)$$

$$P(Z) = P(X) + P(Y) - P(X \cup Y)$$

Die Aussage ist richtig.

E)

Entfällt.

Die Aussage ist falsch.

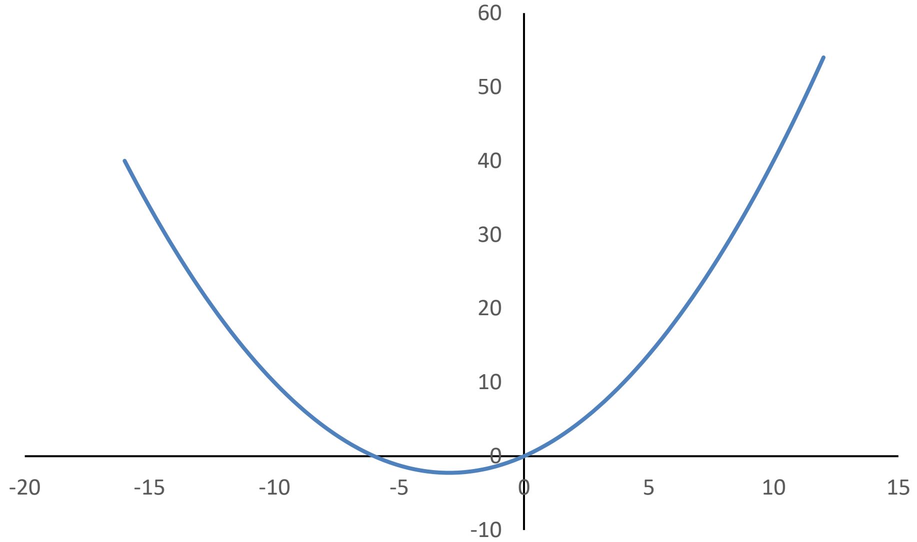
B, C und **D** sind richtig. A und E sind falsch.

Lösung Aufgabe 11

Die Aussagen A) – E) behandeln die Thematik der Regressionsanalyse.

A)

Falsch. Bei der angegebenen Funktion handelt es sich um eine Parabel. Der Regressionskoeffizient a beschreibt bei der Parabel lediglich den Wert, wo die Parabel die y-Achse schneidet, nämlich bei 0:



Die Aussage ist falsch.

B)

Falsch. Bei dem angegebenen Funktionstyp handelt es sich um eine Parabel.

Die Aussage ist falsch.

C)

Richtig. Zur Berechnung des Prognosewertes ist $x = 2$ in die angegebene Funktion einzusetzen, wobei die Regressionskoeffizienten a, b und c mit ihren angegebenen Werten in der Aufgabenstellung zu ersetzen sind:

$$\hat{y} = a + bx + cx^2$$

$$\hat{y} = 0 + 1{,}5x + 0{,}25x^2$$

Einsetzen von $x = 2$:

$$\hat{y} = 0 + 1{,}5 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 2^2 = 4$$

Die Aussage ist richtig.

D)

Falsch. Regressionsfunktionen können beliebige Funktionen bzw. Formen annehmen, je nachdem, welcher Zusammenhang zwischen den Merkmalen vermutet wird. So kommt als Regressionsfunktion beispielsweise auch die Linearfunktion, die Potenzfunktion oder auch die Exponentialfunktion in Frage.

Die Aussage ist falsch.

E)

Entfällt.

Die Aussage ist falsch.

C ist richtig. A, B, D und E sind falsch.

Lösung Aufgabe 12

Die Aussagen A) - C) behandeln die Thematik der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Aussagen D) und E) hingegen die speziellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

A)

Zur Berechnung des Erwartungswertes sind die angegebenen Wahrscheinlichkeiten mit den möglichen Realisationen zu multiplizieren.

$$E(X) = \frac{1}{4} \cdot (-2) + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Die Aussage ist falsch.

B)

Richtig. Siehe die Berechnung in A).

Die Aussage ist richtig.

C)

Falsch. Siehe die Berechnung in C)

Die Aussage ist falsch.

D)

Richtig. Da jede Realisation mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintritt, handelt es sich um eine Gleichverteilung.

Die Aussage ist richtig.

E)

Falsch. Eine Binomialverteilung ist auf zwei mögliche Realisationen begrenzt (Ereignis tritt ein oder nicht). Bei der Binomialverteilung beschreibt n auch nicht die Anzahl der Möglichen Realisationen, sondern die Anzahl der Wiederholungen des Zufallsexperiments.

Die Aussage ist falsch.

B und **D** sind richtig.
B, C und E sind falsch.

Lösung Aufgabe 13

Die Aussagen A)-E) behandeln die Grundlagen der statistischen Testverfahren.

A)

Richtig. Da nur die **Zunahme** der Luftverschmutzung im Mittelpunkt steht und eine mögliche Abnahme nicht betrachtet werden soll, sollte ein einseitiges Testverfahren durchgeführt werden.

Die Aussage ist richtig.

B)

Falsch. Da der Kolbendurchmesser von der Norm sowohl nach oben als auch nach unten abweichen kann, ist hier ein zweiseitiges Testverfahren zu verwenden.

Die Aussage ist falsch.

C)

Richtig. Da nur das **Überwinden** der 5% Hürde im Mittelpunkt steht, sollte ein einseitiges Testverfahren durchgeführt werden.

Die Aussage ist richtig.

D)

Falsch. Eine Veränderung des Energieverbrauchs der Bevölkerung pro Kopf und Jahr ergibt sich, wenn entweder mehr oder weniger Energie verbraucht wird. Entsprechend sollte ein zweiseitiges Testverfahren verwendet werden.

Die Aussage ist falsch.

E)

Richtig. Da nur ein **Abfall** der Nachfrage eines Gutes im Mittelpunkt steht und eine Zunahme nicht in Betracht gezogen werden soll, sollte ein einseitiges Testverfahren durchgeführt werden.

Die Aussage ist richtig.

A, **C** und **E** sind richtig. B und D sind falsch.

Lösung Aufgabe 14

Die Aussagen A) – E) behandeln die Thematik nicht-parametrischen statistischen Testverfahren (Teil 2).

A)

Richtig. Es handelt sich hierbei um einen Vorzeichentest. Bei diesem ist der Anteilswert π immer mit 0,5 zu wählen und n in Höhe des Stichprobenumfangs abzüglich der Stichproben, die als Differenz gleich sind, was hier allerdings nicht der Fall ist. So ergibt sich für die Testgröße die Binomialverteilung

$B(n, \pi) = (20\,; 0{,}5)$

Die Aussage ist richtig.

B)

Da zwei Grenzen zu ermitteln sind, sind in der Binomialverteilung die x-Werte zu suchen, bei dem die Wahrscheinlichkeit der Verteilungsfunktion $F_x(x)$ zum ersten Mal $\frac{\alpha}{2}$ überschreitet, für die untere Grenze, und zum ersten Mal $1 - \frac{\alpha}{2}$ überschreitet oder gleich ist, für die obere Grenze.

$$F_X(c_u) > \frac{0{,}1}{2} = F_X(c_u) > 0{,}05 = 6$$

$$F_X(c_o) \geq 1 - \frac{0{,}1}{2} = F_X(c_o) \geq 0{,}95 = 14$$

Die Grenzen lauten $c_u = 6$ und $c_o = 14$

Die Aussage ist richtig.

C)

Falsch. Siehe B).

Die Aussage ist falsch.

D)

Zur Ermittlung von Z_n ist die Anzahl der Plus-Zeichen (+) zu zählen:

$Z_n = 5$

Die Aussage ist richtig.

E)

Da gilt, dass $Z_n = 5 < c_u = 6 < c_o = 14$, kann die Nullhypothese abgelehnt, bzw. verworfen werden.

Die Aussage ist falsch.

A, B und **D** sind richtig.

C und E sind falsch.

Lösung Aufgabe 45 (numerisch)

Diese Aufgabe behandelt die Thematik der Normalverteilung.

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit P ist die gemeinsame Verteilung der normalverteilten Zufallsvariablen zu bestimmen. Dazu sind die Zufallsvariablen B_1 , B_2 und B_3 zu addieren:

$$B_1 \sim N(1200\,;10092) + B_2 \sim N(1200\,;10092) + B_3 \sim N(1200\,;10092) = B \sim N(3600\,;30276)$$

Es ist die Wahrscheinlichkeit dafür herauszufinden, dass die Brenndauer zwischen 3200 und 3800 Stunden liegt. Folglich gilt für die normalverteilte Zufallsvariable im angegebenen Intervall:

$$P(3200 \leq X \leq 3800)$$

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit sind die angegebenen Grenzen durch eine lineare Transformation in die Standardnormalverteilung zu überführen, damit sich die Wahrscheinlichkeit für das Intervall über die Standardnormalverteilung ermitteln lässt:

$$P\left(\frac{3200-3600}{\sqrt{30276}} \leq Z \leq \frac{3800-3600}{\sqrt{30276}}\right) = P(-2{,}30 \leq Z \leq 1{,}15) = 0{,}8749 - (1 - 0{,}9893)$$

$$P(-2{,}30 \leq Z \leq 1{,}15) = 0{,}8642$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Brenndauer zwischen 3200 und 3800 Stunden liegt beträgt 0,8642.

Die Lösung lautet 0,8642.

Lösung Aufgabe 46 (numerisch)

Diese Aufgabe behandelt die Thematik der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Zur Ermittlung des Quantil-Wertes einer stetigen Verteilungsfunktion, ist die Verteilungsfunktion gleich dem Quantil-Wert (0,5) zu setzten.

ACHTUNG: Bevor man den Wert gleich der Verteilungsfunktion setzt, sollte die Verteilungsfunktion ausmultipliziert werden:

$$F_X(x) = \frac{1}{100}(x-2)^2 = \frac{1}{100} \cdot (x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{100}x^2 - 0{,}04x + 0{,}04$$

Die Verteilungsfunktion ist nun gleichzusetzen und nach Null umzustellen, sodass die PQ-Formel Anwendung finden kann:

$$\frac{1}{100}x^2 - 0{,}04x + 0{,}04 = 0{,}5 \quad | - 0{,}5$$

$$\frac{1}{100}x^2 - 0{,}04x - 0{,}46 = 0 \qquad | : \frac{1}{100}$$

$$x^2 - 4x - 46 = 0$$

PQ-Formel:

$$x_{1,2} = -\left(-\frac{4}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-46)} = 2 \pm \sqrt{2^2 + 46} = 2 \pm 7{,}07$$

$$x_{med} = 2 + 7{,}07 = 9{,}07 \approx 9{,}1$$

Da nur positive Werte als Quantil-Werte in Frage kommen, da die Verteilungsfunktion einen Gültigkeitsbereich von $2 \leq x < 12$ hat, ermittelt sich der Median eindeutig zu 9,1.

Die Lösung lautet 9,1.

Lust auf weitere Klausurlösungen?

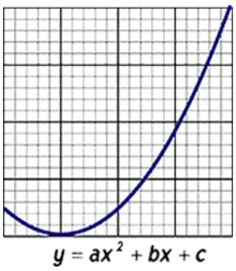
Die **Mathe-Pakete** enthalten die **Klausurlösungen** der relevanten Semester für die Klausur der Wirtschaftsmathematik und Statistik der Fernuni Hagen und vieles mehr:

Videovorträge

Qualitativ hochwertige, strukturierte und motivierende Videovorträge zur Wirtschaftsmathematik und Statistik. Die Videovorträge helfen dir viele Thematiken zu verstehen, ohne das Skript zuvor gelesen zu haben. Der Vortrag ist auf allen gängigen Geräten verfügbar, sowohl auf dem PC, Tablet als auch Smartphone.

Folienskripte

Du erhältst alle Folien und Übersichten der Präsentation zur visuellen Unterstützung und zum besseren Verständnis. Nach dem Ausdrucken kannst du hier Notizen und für dich sinnvolle Ergänzungen während des Videovortrags machen, als auch gänzlich ohne Internet mit den Mathe-Paketen arbeiten und lernen.



Formelsammlungen

Die Formelsammlungen enthalten alle relevanten Formeln. Auf einem Blick hast du eine sofortige Übersicht der Formeln, als auch eine Beschreibung der einzelnen Symbole. So kannst du während des Lernens schnell nachschlagen und musst nicht seitenweise durch das Skript blättern. Zusätzlich kannst du damit schnell und einfach die wichtigsten Formeln Auswendiglernen und im Glossar markieren.

Übungsaufgaben

Zu jeder Thematik des Videovortrages gibt es passende Übungsaufgaben im Multiple-Choice Stil, angelehnt an die Klausuraufgaben. Insgesamt stehen dir bereits über 240 Übungsaufgaben zur Verfügung, sodass du das Gelernte in die Praxis umsetzten kannst und damit dein Wissen weiter vertiefst.

Übungsklausuren

Dir steht eine unbegrenzte Anzahl an Statistik-Übungsklausuren zur Verfügung. Aus allen über 160 Übungsaufgaben werden wahllos genau 10 Aufgaben ausgewählt, die eine Klausur darstellen. Nach Bearbeitung der Aufgaben erhältst du eine persönliche Klausurnote und detailliertes Feedback. Durch das Simulieren einer Klausur kannst du dich perfekt auf den Klausurablauf vorbereiten.