

Fernstudium4You.de

Effektiv und Erfolgreich Fernstudieren

Mathe-Paket I

Formelsammlung

Analysis und lineare Algebra

Grundlagen von Folgen und Reihen

Abstand zwischen zwei Gliedern einer arithmetischen Folge

$$d = a_{n+1} - a_n$$

N-te Folgenglied einer arithmetischen Folge

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Berechnung einer arithmetischen Reihe

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \left(a_1 + \frac{(n - 1) \cdot d}{2} \right)$$

Prozentualer Abstand zwischen zwei Gliedern einer Folge

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

N-tes Folgenglied einer geometrischen Folge

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Berechnung einer geometrischen Reihe

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Grenzwert einer geometrischen Reihe

$$s_{n=\infty} = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q} \text{ für } 0 < q < 1$$

Symbole

a_n	Folgenglied n	q	Prozentualer Abstand
a_{n+1}	Nächstes Folgenglied von a_n	q^n	Prozentualer Abstand hoch n
a_1	Erstes Folgenglied	q^{n-1}	Prozentualer Abstand hoch $n - 1$
d	Abstand	s_n	Reihe
n	Folgengliedzahl		

Rechenregeln und Vereinfachungen bei Grenzwerten von Folgen

Rechenregeln von Grenzwerten

1. $\infty \pm r = \infty$
2. $\frac{r}{\infty} = 0$
3. $\frac{0}{\infty} = 0$
4. $\frac{\infty}{r} = \infty$
5. $\frac{\infty}{0} = \infty$
6. $\frac{r}{0} = \infty$
7. $\frac{0}{r} = 0$
8. $1^\infty = 1$
9. $r^\infty = \infty$ für $r > 1$
10. $r^\infty = 0$ für $0 < r < 1$
11. $(-1)^\infty = \pm 1$

Symbole

r	Reelle Zahl	∞	Unendlichkeit
-----	-------------	----------	---------------

Abschreibungsmethoden mathematisch

Abschreibungsbetrag einer linearen Abschreibung

$$d = \frac{\bar{a}}{m}$$

Restbuchwert einer linearen Abschreibung

$$a_n = \bar{a} \cdot \left(1 - \frac{n}{m}\right)$$

Abschreibungsbetrag einer geometrisch degressiven Abschreibung

$$d_n = a_{n-1} \cdot q_A$$

Restbuchwert einer geometrisch degressiven Abschreibung

$$a_n = \bar{a} \cdot (1 - q_A)^n$$

Abschreibungsbetrag der letzten Periode einer digitalen Abschreibung (arithmetisch degressiv)

$$d_m = \frac{2}{m \cdot (m + 1)} \cdot \bar{a}$$

Abschreibungsbetrag einer digitalen Abschreibung (arithmetisch degressiv)

$$d_n = (m - n + 1) \cdot d_m ; d_n = \frac{2 \cdot (m - n + 1)}{m \cdot (m + 1)} \cdot \bar{a}$$

Restbuchwert einer digitalen Abschreibung (arithmetisch degressiv)

$$a_n = (m - n) \cdot \left(d_m + \frac{(m - n - 1) \cdot d_m}{2}\right)$$

Symbole

\bar{a}	Anschaffungswert	d_n	Abschreibungsbetrag im Jahr n
a_n	Restbuchwert im Jahr n	m	Nutzungsdauer
a_{n-1}	Restbuchwert im Jahr Vorjahr	n	Abschreibungsjahr
d	Abschreibungsbetrag	q_A	Prozentualer Abschreibungssatz
d_m	Abschreibungsbetrag im Endjahr		

Zinseszinsrechnung

Verzinsung einer Periode

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + i)$$

Einfache Verzinsung mehrerer Perioden

$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

Zinseszinsrechnung (Verzinsung mehrerer Perioden)

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$$

Diskontierung (Unbekannte K_0)

$$K_0 = K_n \cdot (1 + i)^{-n}$$

Anzahl der Perioden (Unbekannte n)

$$n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1 + i)}$$

Prozentualer Zinssatz

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Symbole

i	Zinssatz	K_n	Kapital in Periode n
K_0	Kapital in Periode 0	n	Anzahl der Perioden
K_1	Kapital in Periode 1		

Unterjährige und stetige Verzinsung

Anzahl der Zinsperioden bei Monatsverzinsungen

$$m = \frac{12}{\text{Monatsintervall}}$$

Anzahl der Zinsperioden bei Tagesverzinsungen

$$m = \frac{360}{\text{Tageintervall}} \text{ oder } m = \frac{365}{\text{Tageintervall}}$$

Endkapital bei unterjähriger Verzinsung

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m}$$

Effektivzinssatz bei unterjähriger Verzinsung

$$i_{eff} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$$

Monatlicher Zinssatz

$$i_m = \frac{i}{m}$$

Berechnung des nominellen monatlichen Zinssatzes

$$i_m = (i_{eff} + 1)^{\frac{1}{m}} - 1$$

Endwert bei stetiger Verzinsung

$$K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n}$$

Effektiver Jahreszins bei stetiger Verzinsung

$$i_{eff} = e^i - 1$$

Symbole

e	Exponentialfunktion	K_0	Kapital in Periode 0
i	Zinssatz	K_n	Kapital in Periode n
i_{eff}	Effektivzinssatz	m	Anzahl der Zinsperioden
i_m	Nomineller monatlicher Zinssatz	n	Anzahl der Perioden

Periodische Zahlungen (Rente)

Nachschüssige Rentenendwertformel

$$K_n = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Vorschüssige Rentenendwertformel

$$K_n = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \cdot (1+i)$$

Nachschüssige Rentenbarwertformel

$$B_0 = a \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Vorschüssige Rentenbarwertformel

$$B_0 = a \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \cdot (1+i)$$

Endwert bei nachschüssigen Zahlungen

$$K_n = \sum_{t=0}^n a_t \cdot (1+i)^{n-t}$$

Endwert bei vorschüssigen Zahlungen

$$K_n = \sum_{t=0}^n a_t \cdot (1+i)^{n-t+1}$$

Symbole

a	Rentenzahlung	K_n	Endwert
a_t	Zahlung in Periode t	n	Anzahl der Perioden
B_0	Barwert	t	Jeweilige Periode (1,2,3,...)
i	Zinssatz		

Barwert bei nachschüssigen Zahlungen

$$B_0 = \sum_{t=0}^n a_t \cdot (1 + i)^{-t}$$

Barwert bei vorschüssigen Zahlungen

$$B_0 = \sum_{t=0}^n a_t \cdot (1 + i)^{-t+1}$$

Zusammenhänge zwischen Barwert und Endwert

$$K_n = B_0 \cdot (1 + i)^n \Leftrightarrow B_0 = K_n \cdot (1 + i)^{-n}$$

Barwert bei ewiger Rente

$$B_0 = \frac{a}{i}$$

Symbole

a	Rentenzahlung	K_n	Endwert
a_t	Zahlung in Periode t	n	Anzahl der Perioden
B_0	Barwert	t	Jeweilige Periode (1,2,3,...)
i	Zinssatz		

Annuität und Kredittilgung

Annuitätenformel

$$a = B_0 \cdot \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Restschuld eines Annuitätenkredits

$$R_k = K_0 \cdot (1 + i)^k - a \cdot \frac{(1 + i)^k - 1}{i}$$

Kreditzinszahlung eines Kredits zu einem bestimmten Zeitpunkt

$$z_k = R_{k-1} \cdot i$$

Rückzahlungshöhe eines Kredits zu einem bestimmten Zeitpunkt

$$r_k = a - z_k$$

Symbole

a	Annuität	$n(= k)$	Anzahl der Perioden
B_0	Barwert	R_k	Restschuld in Periode k
i	Zinssatz	R_{k-1}	Restschuld des Vorjahres $k - 1$
K_0	Kreditbetrag	r_k	Rückzahlung in Periode k
$k(= n)$	Anzahl der Perioden	z_k	Zinszahlung in Periode k

Grundlagen der Ableitung

Wichtige Ableitungsregeln

Funktion $f(x)$	1. Ableitung $f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
x	1
1	0
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
e^x	e^x
e^{-x}	$-e^{-x}$
$e^{k \cdot x}$	$k \cdot e^{k \cdot x}$
k^x	$k^x \cdot \ln(k)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Symbole

e	Exponentialfunktion	n	Exponent
k	Einfache Zahl	x	Unbekannte Variable
\ln	Logarithmusfunktion		

Vertiefende Ableitungsregeln

Produktregel

$$f(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Kettenregel

$$f(x) = f \cdot (g(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Symbole

f	Funktion f	$g(x)$	Funktion g abhängig von x
$f(x)$	Funktion f abhängig von x	$g'(x)$	1. Ableitung der Funktion g nach x
$f'(x)$	1. Ableitung der Funktion f nach x	x	Unbekannte Variable

Elastizitäten

Formel der Elastizität

$$\varepsilon_f(x_0) = x_0 \cdot \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

Übersicht der Bezeichnungen von Elastizitäten

Elastisch: $|\varepsilon_f(x_0)| > 1$

1-Elastisch: $|\varepsilon_f(x_0)| = 1$

Unelastisch: $|\varepsilon_f(x_0)| < 1$

Symbole

$\varepsilon_f(x_0)$	Elastizität an der Stelle x_0	$f'(x_0)$	1. Ableitung der Funktion nach x_0
$f(x_0)$	Funktion von x_0	x_0	Stelle x_0 an der die Elastizität bestimmt werden soll

Nullstellen einer Funktion

Nullstelle einer Funktion

$$f(x) = 0$$

Allgemeine PQ-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Symbole

$f(x)$	Funktion f abhängig von x	q	Wert ohne Variable in der Funktion
p	Wert mit Variable x in der Funktion	$x_{1,2}$	Lösung für x in der PQ -Formel

Lokales und globales Optimum einer Funktion

Bedingungen zur Bestimmung eines Optimums

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

Hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$

Hinreichende Bedingung für ein Maximum: $f''(x^*) < 0$

Hinreichende Bedingung für ein Minimum: $f''(x^*) > 0$

Bestimmung einer unbestimmten Grenze:

$$\widehat{D}_f = \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \text{Prüfung der linken Seite mit } -\infty \\ \text{Prüfung der rechten Seite mit } +\infty \end{cases}$$

Bedingung für globales Maximum: Linke und rechte Seite = $-\infty$

Bedingung für globales Minimum: Linke und rechte Seite = $+\infty$

Bestimmung einer bestimmten Grenze:

$$\widehat{D}_f = \underline{x} \leq x \leq \bar{x} \text{ mit } \underline{x} \leq x^* \leq \bar{x}$$

Bedingung für globales Maximum: $f(x^*) > f(\underline{x}) ; f(x^*) > f(\bar{x})$

Bedingung für globales Minimum: $f(x^*) < f(\underline{x}) ; f(x^*) < f(\bar{x})$

Symbole

\widehat{D}_f	Definitionsbereich der Funktion f	x^*	Wert des errechneten Optimums
$f'(x)$	1. Ableitung der Funktion nach x	\underline{x}	Untere (linke) Grenze der Funktion
$f''(x)$	2. Ableitung der Funktion nach x	\bar{x}	Obere (rechte) Grenze der Funktion
\mathbb{R}	Alle reellen Zahlen		

Monotonie und Stetigkeit von Funktionen

Monoton steigend (wachsend)

1. Methode: $f(x_1) \leq f(x_2)$ wobei $x_1 < x_2$

2. Methode: $f'(x) \geq 0$

Streng monoton steigend (wachsend)

1. Methode: $f(x_1) < f(x_2)$ wobei $x_1 < x_2$

2. Methode: $f'(x) > 0$

Monoton fallend

1. Methode: $f(x_1) \geq f(x_2)$ wobei $x_1 < x_2$

2. Methode: $f'(x) \leq 0$

Streng monoton fallend

1. Methode: $f(x_1) > f(x_2)$ wobei $x_1 < x_2$

2. Methode: $f'(x) < 0$

Symbole

$f(x_1)$	Funktion f mit eingesetzter Zahl x_1	x_1	Beliebig gewählter x_1 -Wert
$f(x_2)$	Funktion f mit eingesetzter Zahl x_2	x_2	Beliebig gewählter x_2 -Wert
$f'(x)$	1. Ableitung der Funktion f nach x		

Krümmungsverhalten und Wendepunkte einer Funktion

Konvexe Krümmung

$$f''(x) \geq 0$$

Streng konvexe Krümmung

$$f''(x) > 0$$

Konkave Krümmung

$$f''(x) \leq 0$$

Streng konkave Krümmung

$$f''(x) < 0$$

Bedingungen zur Bestimmung eines Wendepunkts

1. Bedingung: $f''(x) = 0$

2. Bedingung: $f'''(x) \neq 0$

Bedingungen zur Bestimmung eines Sattelpunkts

1. Bedingung: $f''(x) = 0$

2. Bedingung: $f'''(x) \neq 0$

3. Bedingung: $f'(x) = 0$

Symbole

$f'(x)$	1. Ableitung der Funktion f nach x	$f'''(x)$	3. Ableitung der Funktion nach x
$f''(x)$	2. Ableitung der Funktion nach x		

Nullstellenbestimmung mittels Newton-Verfahren und Polynomdivision

Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Symbole

$f(x_n)$	Funktionswert mit eingesetztem Ergebnis von x_n	x_n	Ergebnis des Iterationsschritts n
$f'(x_n)$	Funktionswert der 1. Ableitung mit eingesetztem Ergebnis von x_n	x_{n+1}	Ergebnis für den nächsten Iterationsschritt n
n	Anzahl der Iterationsschritte		

Grundlagen der Regel von L'Hospital

Regel von L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

Wichtige Grenzwertregeln von L'Hospital

1. $\frac{r}{0} = \infty$
2. $\frac{0}{r} = 0$
3. $e^0 = 1$
4. $e^\infty = \infty$
5. $\ln(x = 0) = -\infty$
6. $(-\ln 0) = \infty$

Wichtige Ableitungsregeln für L'Hospital

1. $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
2. $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
3. $f(x) = (-\ln x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x}$
4. $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Symbole

e	Exponentialfunktion	$h'(x)$	1. Ableitung der Funktion h nach x
$f(x)$	Funktion f abhängig von x	$\lim_{x \rightarrow x_0}$	Limes gegen x_0
$f'(x)$	1. Ableitung der Funktion f nach x	\ln	Logarithmusfunktion
$g(x)$	Funktion g abhängig von x	r	Reelle Zahl
$g'(x)$	1. Ableitung der Funktion g nach x	x	Unbekannte Variable
$h(x)$	Funktion h abhängig von x	∞	Unendlichkeit

1. Fall der Anwendung von L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

2. Fall der Anwendung von L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = \frac{0}{0}$$

Transformation 3. Fall

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = 0 \cdot \infty = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow g(x) \cdot h(x) = \frac{h(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Transformation 4. Fall

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = \infty - \infty = g(x) - h(x) = \frac{g(x) \cdot h(x) - h(x) \cdot g(x)}{g(x) \cdot h(x)} = \frac{\frac{1}{g(x) \cdot h(x)} - \frac{1}{h(x) \cdot g(x)}}{\frac{1}{g(x) \cdot h(x)}} = \frac{0}{0}$$

Transformation 5. Fall

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = 0^0 = g(x)^{h(x)} = e^{\frac{\ln(g(x))}{\frac{1}{h(x)}}} = e^{\frac{\infty}{\infty}}$$

Transformation 6. Fall

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = 1^\infty = g(x)^{h(x)} = e^{\frac{\ln(g(x))}{\frac{1}{h(x)}}} = e^{\frac{0}{0}}$$

Transformation 7. Fall

$$\lim_{x \rightarrow x_0} = \infty^0 = g(x)^{h(x)} = e^{\frac{\ln(g(x))}{\frac{1}{h(x)}}} = e^{\frac{\infty}{\infty}}$$

Symbole

e	Exponentialfunktion	$\lim_{x \rightarrow x_0}$	Limes gegen x_0
$g(x)$	Funktion g abhängig von x	\ln	Logarithmusfunktion
$h(x)$	Funktion h abhängig von x	∞	Unendlichkeit

Partielle Ableitung und totales Differential

Notationen der 1. partiellen Ableitung

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

Notationen der 2. partiellen Ableitung

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$$

Totales Differential

$$df(x, y) = f_x(x, y) \cdot dx + f_y(x, y) \cdot dy$$

Symbole

$df(x, y)$	Notation des totalen Differentials	$f_{xx}(x, y)$	1. Partielle Ableitung nach x 2. Partielle Ableitung nach x
dx	Veränderung der Variable x	$f_{xy}(x, y)$	1. Partielle Ableitung nach x 2. Partielle Ableitung nach y
dy	Veränderung der Variable y	$f_{yy}(x, y)$	1. Partielle Ableitung nach y 2. Partielle Ableitung nach y
$f_x(x, y)$	1. Partielle Ableitung nach x	$f_{yx}(x, y)$	1. Partielle Ableitung nach y 2. Partielle Ableitung nach x
$f_y(x, y)$	1. Partielle Ableitung nach y		

Grenzrate der Substitution von y für x

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

Grenzrate der Substitution von x für y

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)}$$

Symbole

dx	Veränderung der Variable x	$f_x(x, y)$	1. Partielle Ableitung nach x
dy	Veränderung der Variable y	$f_y(x, y)$	1. Partielle Ableitung nach y

Ermittlung eines Optimums bei mehreren Variablen (Eliminationsmethode, Lagrange)

Bedingungen eines lokalen Optimums für mehrere Variablen

Notwendige Bedingung: $\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$

Hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum: $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$

Hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum: $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$

Notation einer Funktion mit Restriktionen

$\max/\min \left\{ \text{Funktion} \left| \begin{array}{l} \text{Alle Bedingungen} \\ \text{werden hier} \\ \text{untereinander aufgelistet} \end{array} \right. \right\}$

Notation der Lagrangefunktion

$L(x, y, \lambda) = \text{Optimierende Funktion} + \lambda \cdot (\text{Nebenbedingung in Nullform})$

Symbole

$f_{xx}(x_0, y_0)$	1,2. Ableitung nach x mit eingesetzter stationärer Stelle	λ	Lambdafaktor der Lagrangefunktion
$f_{yy}(x_0, y_0)$	1,2. Ableitung nach y mit eingesetzter stationärer Stelle	(x_0, y_0)	Stationäre Stelle
$f_{xy}(x_0, y_0)$	Kreuzableitung nach x, y mit eingesetzter stationärer Stelle	$\Delta(x_0, y_0)$	Lokales Optimum mit eingesetzter stationärer Stelle
$L(x, y, \lambda)$	Notation der Lagrangefunktion		

Integrieren („Aufleiten“) einer Funktion

Wichtige Integrationsregeln

Funktion f(x)	Integration F(x)
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$
1	$x + c$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}} + c = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right) \cdot x^{\frac{1}{n}+1} + c$
e^x	$e^x + c$
e^{-x}	$-e^{-x} + c$
$e^{k \cdot x}$	$\frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
k^x	$\frac{1}{\ln(k)} \cdot k^x + c$
$\ln x$	$(\ln x - 1)x + c$

Symbole

c	Konstante	\ln	Logarithmusfunktion
e	Exponentialfunktion	n	Exponent
k	Einfache Zahl	x	Unbekannte Variable

Flächenberechnung bei Funktionen

Berechnung des Flächeninhalts einer Funktion

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) \cdot dx = F(x_b) - F(x_a) \text{ wobei } x_b > x_a$$

Berechnung des absoluten Flächeninhalts einer Funktion

$$\int_{x_a}^{x_b} |f(x)| \cdot dx = \left| \int_{x_a}^{x_0} f(x) \cdot dx \right| + \left| \int_{x_0}^{x_b} f(x) \cdot dx \right|$$

Betragsungleichung

$$\int_{x_a}^{x_b} |f(x)| \cdot dx \geq \left| \int_{x_a}^{x_b} f(x) \cdot dx \right|$$

Symbole

dx	Funktion wird mit der Variable x integriert	x_0	Nullstelle der Funktion
$f(x)$	Funktion f abhängig von x	$\int_{x_a}^{x_b} f(x)$	Flächeninhalt von $f(x)$ über das Intervall $[x_a, x_b]$
$F(x_a)$	Integrierte Funktion F nach x mit eingesetzter unterer Integrationsgrenze x_a	$\left \int_{x_a}^{x_b} f(x) \right $	Betrag des Flächeninhalts von $f(x)$ über das Intervall $[x_a, x_b]$
$F(x_b)$	Integrierte Funktion F nach x mit eingesetzter unterer Integrationsgrenze x_b	$\int_{x_a}^{x_b} f(x) $	Absoluter Flächeninhalts von $f(x)$ über das Intervall $[x_a, x_b]$
x_a	Untere Integrationsgrenze	$\left \int_{x_a}^{x_0} f(x) \right $	Betrag des Flächeninhalts von $f(x)$ über das Intervall $[x_a, x_0]$
x_b	Obere Integrationsgrenze	$\left \int_{x_0}^{x_b} f(x) \right $	Betrag des Flächeninhalts von $f(x)$ über das Intervall $[x_0, x_b]$

Grundlagen von Vektoren

n-dimensionaler Spaltenvektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

n-dimensionaler Zeilenvektor

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

Transponieren eines Vektors

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{a}^T = \mathbf{a}' = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \Rightarrow \mathbf{a}^T = \mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Relationen von Vektoren

a gleich **b** ($\mathbf{a} = \mathbf{b}$)

a ungleich **b** ($\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$)

a kleiner als **b** ($\mathbf{a} < \mathbf{b}$)

a kleiner gleich **b** ($\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$)

Symbole

\mathbf{a}	Vektor \mathbf{a}	\mathbf{b}	Vektor \mathbf{b}
a_{1-n}	Beliebig viele reelle Zahlen bis n	n	Anzahl der reellen Zahlen eines Vektors
$\mathbf{a}^T = \mathbf{a}'$	Transponierter Vektor		

Addition/Subtraktion von Vektoren

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vektortyp und die Anzahl } n \text{ müssen \u00fcbereinstimmen}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$b \cdot \mathbf{a} = b \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot a_1 \\ \vdots \\ b \cdot a_n \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$$

Nullvektor (Spezieller Vektor)

$$\mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektor (Spezieller Vektor)

$$\mathbf{e}_{i=1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{e}_{i=2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{e}_{i=n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Symbole

\mathbf{a}	Vektor \mathbf{a}	b_{1-n}	Beliebig viele reelle Zahlen bis n in Vektor \mathbf{b}
a_{1-n}	Beliebig viele reelle Zahlen bis n in Vektor \mathbf{a}	$\mathbf{e}_{i=n}$	Einheitsvektor mit der Zahl 1 an der Stelle n
\mathbf{a}^T	Transponierter Vektor	n	Anzahl der reellen Zahlen eines Vektors
b	Skalarmultiplikator	\mathbf{o}	Nullvektor
\mathbf{b}	Vektor \mathbf{b}	$\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$	Summe aus der Multiplikation der jeweiligen reellen Zahlen bis n

Norm, Orthogonalität und lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren

Norm eines Vektors

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

Einheitslänge eines Vektors

$$\frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$$

Dreiecksungleichung für Vektoren

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

Orthogonalität von Vektoren

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = 0$$

Gleichung für die lineare Abhängigkeit

$$\mathbf{a} = k \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Symbole

\mathbf{a}	Vektor \mathbf{a}	$\ \mathbf{a} + \mathbf{b}\ $	Länge der addierten Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b}
$\ \mathbf{a}\ $	Länge des Vektors \mathbf{a}	\mathbf{b}	Vektor \mathbf{b}
a_{1-n}	Beliebig viele reelle Zahlen bis n	$\ \mathbf{b}\ $	Länge des Vektors \mathbf{b}
\mathbf{a}^T	Transponierter Vektor	k	Skalarmultiplikator
\mathbf{a}, \mathbf{b}	Vektor \mathbf{a} und \mathbf{b} (Vergleich)	n	Anzahl der reellen Zahlen eines Vektors

Grundlagen von Matrizen

Aufbau einer (m, n) -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Transponieren einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Relationen von Matrizen

A gleich **B** ($A = B$)

A ungleich **B** ($A \neq B$)

A kleiner als **B** ($A < B$)

A kleiner gleich **B** ($A \leq B$)

Addition/Subtraktion von Matrizen

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix} \text{ bei gleich-} \\ \text{dimensionierten} \\ \text{Matrizen}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$b \cdot A = b \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot a_{11} & \dots & b \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b \cdot a_{m1} & \dots & b \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Symbole

A	(m, n) Matrix A	b	Skalarmultiplikator
$a_{1-m,1-n}$	Beliebig viele reelle Zahlen für die Matrix A Zeilen und Spalten	$b_{1-m,1-n}$	Beliebig viele reelle Zahlen für die Matrix B Zeilen und Spalten
A^T	Transponierte Matrix	m	(An)Zahl der Zeilen der Matrix
B	(m, n) Matrix B	n	(An)Zahl der Spalten der Matrix

Produkt von Matrizen (Falkisches Schema)

$$\begin{matrix} & & & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mr} \end{pmatrix} & = & \mathbf{C} & \begin{matrix} \text{Anzahl der Spalten } A \\ \text{muss mit der Anzahl der Anzahl} \\ \text{der Zeilen von } B \text{ \u00fcbereinstimmen} \end{matrix}
 \end{matrix}$$

mit $c_{ij} = a_i^T \cdot b_j = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$ (Summe der einzelnen Multiplikationen)

Quadratische Matrix (Spezielle Matrizen)

$$\mathbf{A}(m = n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix (Spezielle Matrizen)

$$\mathbf{A}(m, n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrix (Spezielle Matrizen)

$$\mathbf{A}(m, n) = \mathbf{A}^T(m, n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Symbole

$\mathbf{A}(m, n)$	(m, n) Matrix \mathbf{A}	\mathbf{C}	Matrix \mathbf{C} nach der Multiplikation der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B}
$a_{1-m,1-n}$	Beliebig viele reelle Zahlen f\u00fcr die Matrix \mathbf{A} Zeilen und Spalten	$c_{1-m,1-r}$	Multiplikationsergebnisse der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B}
\mathbf{A}^T	Transponierte Matrix	m	(An)Zahl der Zeilen der Matrix
\mathbf{B}	(m, n) Matrix \mathbf{B}	n	(An)Zahl der Spalten der Matrix
$b_{1-m,1-n}$	Beliebig viele reelle Zahlen f\u00fcr die Matrix \mathbf{B} Zeilen und Spalten		

Diagonalmatrix (Spezielle Matrizen)

$$A(m, n) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix (Spezielle Matrizen)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nullmatrix (Spezielle Matrizen)

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix (Spezielle Matrizen)

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{yx}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

Symbole

$A(m, n)$	(m, n) Matrix A	$f_{xx}(x, y)$	1. Partielle Ableitung nach x 2. Partielle Ableitung nach x
E	Einheitsmatrix	$f_{xy}(x, y)$	1. Partielle Ableitung nach x 2. Partielle Ableitung nach y
O	Nullmatrix	$f_{yy}(x, y)$	1. Partielle Ableitung nach y 2. Partielle Ableitung nach y
H	Hesse-Matrix	$f_{yx}(x, y)$	1. Partielle Ableitung nach y 2. Partielle Ableitung nach x

Rang einer Matrix

Maximaler Rang einer Matrix

$$m > n \Rightarrow \text{Rang}(rg) \leq n$$

$$m < n \Rightarrow \text{Rang}(rg) \leq m$$

$$m = n \Rightarrow \text{Rang}(rg) \leq m \text{ bzw. } n$$

Rang bei einer transponierten Matrix

$$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T) = \text{Rang}(rg(A)) = \text{Rang}(rg(A^T))$$

Symbole

A	(m, n) Matrix A	rg	Rang einer Matrix
A^T	Transponierte Matrix	$rg(A)$	Rang der Matrix A
m	(An)Zahl der Zeilen der Matrix	$rg(A^T)$	Rang einer transponierten Matrix
n	(An)Zahl der Spalten der Matrix		

Zusammenhänge und Aufstellen von linearen Gleichungssystemen

Gleichungssystem in Matrixschreibweise mit Multiplikationen

$$A \cdot x = b$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & -7 \\ 8 & 3 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \\ -7 & -6 & 12 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 164 \\ 31 \\ -95 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem in Kreuzform-Schreibweise (für Gauß)

$$\frac{x \mid RHS}{A \mid b}$$

$$A \left[\begin{array}{cccc|c} \overbrace{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4}^x & RHS & & & \\ 4 & 1 & 7 & -7 & 110 \\ 8 & 3 & 2 & -6 & 164 \\ 1 & 1 & 0 & -4 & 31 \\ -7 & -6 & 12 & -5 & -95 \end{array} \right] b$$

Homogenes Gleichungssystem

$$A \cdot x = o$$

Inhomogenes Gleichungssystem

$$A \cdot x = b \quad \text{mit } b \neq o$$

Symbole

A	Matrix der Zahlen vor den unbekannt Variablen	RHS	Right Hand Side Rechte Seite der Gleichung
b	Ergebnisse der Gleichungen (Ergebnisvektor)	x	Vektor der unbekannt Variablen
o	Nullvektor	x_{1-4}	Unbekannte Variablen

Lösung von Gleichungssystemen mittels Gauß-Algorithmus (Rekursive Methode)

Lösungsfälle nach dem Gauß-Algorithmus

Fall 1: Das lineare Gleichungssystem (LGS) ist nicht lösbar

$$rg(A) < rg(A, b)$$

Fall 2: Das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar

$$r < n$$

Fall 3: Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar

$$rg(A) = rg(A, b) \text{ und } r = n$$

Symbole

n	Anzahl der Variablen	$rg(A)$	Rang der Matrix der Zahlen vor den unbekannt Variablen
r	Anzahl der Gleichungen/Zeilen	$rg(A, b)$	Rang des gesamten Gleichungssystems

Lösung von Gleichungssystemen mittels Gauß-Algorithmus (Pivot Methode)

Lösung von Gleichungssystemen mittels inverser Matrix

$$x = A^{-1} \cdot b$$

Bildung einer inversen Matrix

$$A^{-1} = A|E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow E|A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)$$

Reguläre Matrix

$$A = A^{-1} \Rightarrow rg(A) = r$$

Singuläre Matrix

$$A \neq A^{-1} \Rightarrow rg(A) < r$$

Symbole

A	Matrix der Zahlen vor den unbekanntem Variablen	r	Anzahl der Zeilen
A^{-1}	Inverse Matrix der Matrix A	$rg(A)$	Rang der Matrix der Zahlen vor den unbekanntem Variablen
b	Ergebnisse der Gleichungen (Ergebnisvektor)	x	Vektor der unbekanntem Variablen
E	Einheitsvektor		

Lineare Programme & Graphische Lösung

Allgemeine Notation linearer Programme

$$\begin{aligned}
 & \max \quad 6x_1 + 4x_2 \\
 & \text{u. d. N.} \quad 5x_1 + 4x_2 \leq 1000 \\
 & \quad \quad 7x_1 + 3x_2 \leq 800 \\
 & \quad \quad x_1 \leq 100 \\
 & \quad \quad \quad x_2 \leq 160 \\
 & \quad \quad x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Notation in Summenschreibweise eines linearen Programmes

$$\max \left\{ \begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 1000 \\ 7x_1 + 3x_2 \leq 800 \\ x_1 \leq 100 \\ x_2 \leq 160 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Notation in Matrixschreibweise eines linearen Programmes

$$\max \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \} \text{ mit } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \\ 100 \\ 160 \end{pmatrix}, \mathbf{o} = (0)$$

Symbole

\mathbf{A}	Matrix der Zahlen vor den unbekannt Variablen	\mathbf{o}	Nullvektor
\mathbf{b}	Ergebnisse der Gleichungen (Ergebnisvektor)	\mathbf{x}	Vektor der unbekannt Variablen
\mathbf{c}	Matrix der Zahlen vor den unbekannt Variablen der Zielfunktion	x_1	Unbekannte Variable 1
\mathbf{c}^T	Transponierter Vektor \mathbf{c}	x_2	Unbekannte Variable 2

Simplex-Algorithmus

Notation eines Simplex-Tableaus

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
-6	-4	0	0	0	0	0
5	4	1	0	0	0	1000
7	3	0	1	0	0	800
1	0	0	0	1	0	100
0	1	0	0	0	1	160

Symbole

RHS	Right Hand Side Rechte Seite der Gleichung	x_2	Unbekannte Variable 2 der Zielfunktion
x_1	Unbekannte Variable 1 der Zielfunktion	x_{3-6}	Schlupfvariablen

Ökonomische Interpretation des gelösten Simplex-Tableaus

Basisvariablen eines Simplex-Tableaus

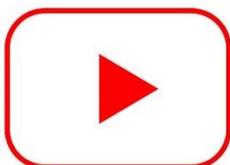
Basisvariable	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Max Gewinn	0	0	0	$6/7$	0	$10/7$	$6400/7$
x_3 ←	0	0	1	$-5/7$	0	$-13/7$	$920/7$
x_2 ←	0	1	0	0	0	1	160
x_1 ←	1	0	0	$1/7$	0	$-3/7$	$320/7$
x_5 ←	0	0	0	$-1/7$	1	$3/7$	$380/7$

Symbole

RHS	Right Hand Side Rechte Seite der Gleichung	x_4	Nicht Basisvariable
x_1	Basisvariablen in Zeile 4	x_5	Basisvariablen in Zeile 5
x_2	Basisvariablen in Zeile 3	x_6	Nicht Basisvariable
x_3	Basisvariablen in Zeile 2		

Zusammenfassung Analysis und lineare Algebra

Das **Mathe-Paket I** fasst den Kurs der Analysis und linearen Algebra (Modul 31101) strukturiert und übersichtlich zusammen. Folgende Inhalte bereiten dich sowohl theoretisch als auch praktisch auf die Klausur der Fernuni Hagen vor:



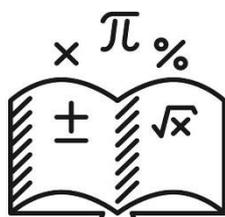
Videovortrag

21 Lehrstunden durch qualitativ hochwertige, strukturierte und motivierende Videovorträge zum Thema Analysis und lineare Algebra. Der Videovortrag hilft dir viele Thematiken zu verstehen, ohne das Skript zuvor gelesen zu haben. Der Vortrag ist auf allen gängigen Geräten verfügbar, sowohl auf dem PC, Tablet als auch Smartphone.



Folienskript

Auf **254 Seiten** erhältst du alle Folien der Präsentation zur visuellen Unterstützung und zum besseren Verständnis. Das Skript dient als Zusammenfassung und du kannst Notizen und für dich sinnvolle Ergänzungen während des Videovortrags machen, als auch gänzlich ohne Internet mit dem Mathe-Paket I arbeiten und lernen.



Formelsammlung

Die Formelsammlung enthält **alle relevanten Formeln**. Auf einem Blick hast du eine sofortige Übersicht der Formeln, als auch eine Beschreibung der einzelnen Symbole am Boden. So kannst du während des Lernens schnell nachschlagen und musst nicht seitenweise durch das Skript blättern. Zusätzlich kannst du damit schnell und einfach die Formeln für die Prüfung auswendig lernen.



Klausurlösungen

Die Klausurlösungen vom **Sommersemester 2015 bis zum aktuellen Semester** helfen dir als Übung, dich bestens auf die Klausur vorzubereiten. Du lernst die Vorgehensweise zur Lösung der Klausuraufgaben und deren eingebauten Fallen kennen, sodass du die maximale Punktzahl aus dem Analysis und linearen Algebra Teil herausholen kannst.

[Weitere Informationen zum Mathe-Paket I auf Fernstudium4You.de](https://www.fernstudium4you.de)